doi:10.11959/j.issn.1000-436x.2017179

零相关区高斯整数序列集构造法

李玉博，孙嘉安，荆楠
（燕山大学信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004）

摘　要：研究了具有零相关区的高斯整数序列集构造方法。该方法基于二元正交矩阵，首先利用插零法构造出具有零相关区的三元序列集。然后利用完备高斯整数序列进行滤波，从而将三元序列变换成高斯整数序列且保持序列相关函数值在零相关区内为 0，得到的零相关区高斯整数序列集参数达到或几乎达到 Tang-Fan-Matsufuji 理论界。
关键词：高斯整数序列；零相关区(ZCZ)；正交矩阵；完备序列
中图分类号：TN911.2　　**文献标识码**：A

Construction of zero correlation zone Gaussian integer sequence set

LI Yu-bo, SUN Jia-an, JING Nan
(School of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: The construction of zero correlation zone (ZCZ) Gaussian integer sequence set was researched. Based on binary orthogonal matrices, ZCZ ternary sequence sets were constructed by adding zeros at first. Then the ternary ZCZ squences were transformed into Gaussian integer sequences by using a perfect Gaussian integer sequence without changing the ideal autocorrelation functions and crosscorrelation functions in the zero correlation zone. The proposed ZCZ Gaussian integer sequence sets are optimal or almost optimal with respect to the Tang-Fan-Matsufuji bound.
Key words: Gaussian integer sequence, zero correlation zone (ZCZ), orthogonal matrix, perfect sequence

1　引言

近年来，具有优良相关性能的高斯整数序列研究受到广泛关注。高斯整数序列是定义在集合 $\{a+b\mathrm{i}\}$ 上的序列，序列元素的实部和虚部都是整数。特别地，定义在集合 $\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$ 上的四元序列和 QAM 序列都是高斯整数序列的特殊情况。当前，高斯整数序列的研究成果还不是很多，而且大部分研究都集中在四元序列以及 QAM/QAM+序列等特殊的高斯整数序列上[1~4]。一般化的高斯整数序列设计则主要集中在完备高斯整数序列构造方法的研究。Fan 等[5]构造了一类周期为 $N=p^m-1\equiv0(\bmod 4)$ 的高斯整数序列，其周期自相关函数在位移不等于 $\frac{N}{4}$、$\frac{N}{2}$、$\frac{3N}{4}$ 时等于 0。文献[6]利用定义在集合 $\{0,\pm1,\pm\mathrm{i}\}$ 上的 8 个基序列构造了长度为偶数的完备高斯整数序列。文献[7]利用分圆类构造了长度为奇素数的完备高斯整数序列。文献[8]利用伪随机序列构造了一类长度为 2^m-1 的完备高斯整数序列。Pei[9]和 Chang 等[10]则分别构造了任意长度的完备高斯整数序列。文献[11]利用整数集上的多电平完备序列构造了完备高斯整数序列。文献[12]构造了一类含有较多零

收稿日期：2016-05-23；**修回日期**：2017-06-28
通信作者：李玉博，liyubo6316@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.61501395, No.61671402）；河北省自然科学基金资助项目（No.F2015203204, No.F2016203176）；燕山大学青年教师自主研究计划基金资助项目（No.16LGA009）
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61501395, No.61671402), The Natural Science Foundation of Hebei Province (No.F2015203204, No.F2016203176), The Independent Research Programs for Young Teachers of Yanshan University (No.16LGA009)

元素的稀疏完备高斯整数序列。相比之下，高斯整数上的零相关区序列集研究成果非常少[13]，远远不能满足实际通信系统的需求。

本文给出一类新的零相关区高斯整数序列集构造方法，利用二元正交矩阵和完备高斯整数序列构造得到了一类零相关区高斯整数序列集。该序列集参数达到或几乎达到 Tang-Fan-Matsufuji 理论界[14]，并且零相关区长度可以灵活设定以满足不同的应用需求。

2 基本概念

定义 1　设 $u=(u(0),u(1),u(2),\cdots u(N-1))$ 是一个长度为 N 的序列，如果其元素取自集合 $\{a+b\mathrm{j}\}$，其中，a 和 b 为整数，则称序列 u 为高斯整数序列。

定义 2　设 u_i、u_j 是2个长度为 L 的复数序列，序列 u_i 和 u_j 的周期互相关函数定义如下

$$R_{u_i,u_j}(\tau)=\sum_{t=0}^{L-1}u_{i,t}u_{j,t+\tau}^{*} \tag{1}$$

其中，$0\leqslant\tau<L$，下标加法模 L 运算，$(\cdot)^*$ 表示取复共轭。若 $i=j$，则定义式(1)为序列 u_i 的自相关函数，可以用 $R_{u_i}(\tau)$ 表示。

定义 3　如果序列 $u=(u(0),u(1),u(2),\cdots,u(N-1))$ 的自相关函数满足

$$R_u(\tau)=\begin{cases}E_u, & \tau=0(\bmod N)\\ 0, & \tau\neq 0(\bmod N)\end{cases} \tag{2}$$

则称序列 u 为完备序列。

定义 4　设 U 是一个序列集合，包含 M 个长度为 N 的序列。对于任意 $u_i,u_j\in U$，若当 $|\tau|\leqslant T$，$i\neq j$ 或 $0<|\tau|\leqslant T$，$i=j$ 时，序列周期相关函数满足

$$\left|R_{u_i,u_j}(\tau)\right|=0 \tag{3}$$

则序列集 U 称为零相关区(ZCZ)序列集，序列集参数用 $ZCZ(N,M,T)$ 表示，其中，N 表示序列长度，M 表示序列集合中的序列数目，T 表示零相关区长度。

定义 5　对于一个零相关区序列集 $ZCZ(N,M,T)$，定义序列集的性能参数如式(4)所示。

$$\eta=\frac{(T+1)M}{N} \tag{4}$$

由 ZCZ 序列集的理论界[14]可知 $\eta\leqslant 1$，当 $\eta=1$ 时，称 ZCZ 序列集为参数达到理论界限的最佳 ZCZ 序列集。

文献[15]提出了利用滤波法进行传统多相序列设计的思想，本文将文献[15]的滤波法推广到高斯整数域序列设计。

定义 6[15]　设 $u=(u(0),u(1),\cdots,u(N-1))$ 和 $v=(v(0),v(1),\cdots,v(N-1))$ 是 2 个长度为 N 的序列。利用 2 个序列构造新的序列 $u_v=(u_v(0),u_v(1),\cdots,u_v(N-1))$。具体构造如下

$$u_v(k)=\sum_{t=0}^{N-1}v(t)u(t+k)^*,0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5}$$

则称序列 u_v 是由序列 u 经序列 v 滤波得到，将 v 称为滤波序列，序列 u 称为基序列。$u_v=u*v$，其中，*表示滤波运算，下同。

引理 1[15]　设序列 $v=(v(0),v(1),v(2),\cdots,v(N-1))$ 是一个完备序列，则其 DFT 变换序列 $\hat{v}=(\hat{v}(0),\hat{v}(1),\hat{v}(2),\cdots,\hat{v}(N-1))$ 满足 $|\hat{v}(0)|=|\hat{v}(1)|=\cdots=|\hat{v}(N-1)|$。

根据引理 1，可以得到以下引理。

引理 2　设 2 个序列集 $U_v=\{u_v^0,u_v^1,\cdots,u_v^{M-1}\}$ 和 $U=\{u^0,u^1,\cdots,u^{M-1}\}$，设序列 $v=(v(0),v(1),\cdots,v(N-1))$ 是一个长度为 N 的完备序列。序列集 U_v 中的任意序列 $u_v^m=(u_v^m(0),u_v^m(1),\cdots,u_v^m(N-1))$ 由序列集 U 的序列经 v 滤波得到，如 $u_v^m(k)=\sum_{t=0}^{N-1}v(t)u^m(t+k)^*$。

对于任意的 $0\leqslant m,m'\leqslant M-1$，序列 u_v^m 和 $u_v^{m'}$ 由式(5)得到，对应基序列分别为 $u^{m'}$ 和 u^m，则对于任意移位 τ_0，如果满足 $R_{u^m,u^{m'}}(\tau_0)=0$，有 $R_{u_v^m,u_v^{m'}}(\tau_0)=0$ 成立。

引理 2 可根据 DFT 变换性质证得，略去。

3 零相关区高斯整数序列集的构造

本节首先利用二元正交矩阵通过插零的方法得到一类三元零相关区序列集，然后利用完备高斯整数序列滤波法将三元序列变换到高斯整数序列。

3.1 插零法构造三元零相关区序列集

3.1.1 构造法 1

设定初始参数 N 和 Z，设 $L=NZ$。取一个 $N\times N$ 阶的二元正交矩阵 $\boldsymbol{H}=\left[h_{t,k}\right]_{N\times N}$，其中，$h_{t,k}\in\{1,-1\}$ 表示矩阵的第 t 行第 k 列元素。若

$\gcd(N,Z)=1$，按以下步骤进行插零。

步骤 1　将矩阵 $\boldsymbol{H}$ 元素后面加上 $Z-1$ 个 0，构成新的矩阵如式(6)所示。

$$\tilde{\boldsymbol{H}}=\begin{bmatrix} h_{0,0},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1}, & h_{0,1},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1}, & \cdots, & h_{0,N-1},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} \\ h_{1,0},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1}, & h_{1,1},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1}, & \cdots, & h_{1,N-1},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1,0},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1}, & h_{N-1,1},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1}, & \cdots & h_{N-1,N-1},\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

由式(6)可知，矩阵 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 是一个 $N\times NZ$ 阶的二维矩阵，其第 n 行可以表示为

$$\tilde{\boldsymbol{h}}_n=(\tilde{h}_{n,0},\tilde{h}_{n,1},\cdots\tilde{h}_{n,L-1}) \tag{7}$$

$$\tilde{h}_{n,t}=\begin{cases} h_{n,k}, & t=kZ \\ 0, & \text{其他} \end{cases}，0\leqslant k\leqslant N-1，0\leqslant t\leqslant NZ-1 \tag{8}$$

步骤 2　构造序列集 $S=\{s^0,s^1,\cdots,s^{N-1}\}$，其中每个序列长度为 $L=NZ$。具体构造如下

$$s^n=(s^n(0),s^n(1),\cdots,s^n(L-1))，\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{9}$$

$$s^n(t)=\tilde{h}_{n,t}，\ 0\leqslant t\leqslant L-1 \tag{10}$$

定理 1　构造得到的序列集 S 是一个三元零相关区序列集，参数为 $ZCZ(L,N,Z-1)$，其中，$L=NZ$。

证明　由构造过程可知，序列集 S 是一个三元序列序列集。根据步骤 1，矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中每个元素后面加上 $Z-1$ 个 0，因此，得到的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 共有 N 行，每行长度为 NZ。由步骤 2 可知，构造法 1 得到的序列是由矩阵 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 的每行组成，因此，得到的序列集 S 中共有 N 个长度为 $L=NZ$ 的序列。下面，证明 S 的零相关区长度为 $Z-1$。

设任意 2 个序列 $s^{n_1},s^{n_2}\in S$，计算其互相关函数如下所示。

当 $\tau=0$ 时，对于任意 $0\leqslant n_1\neq n_2\leqslant N-1$，有

$$R_{s^{n_1},s^{n_2}}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}h_{n_1,t}h_{n_2,t}=0 \tag{11}$$

当 $1\leqslant\tau\leqslant Z-1$ 时，由构造过程可知，序列每 Z 个连续元素中具有 $Z-1$ 个零元素，因此，对于任意的 $0\leqslant n_1,n_2\leqslant N-1$，有

$$R_{s^{n_1},s^{n_2}}(\tau)=\sum_{t=0}^{L-1}\tilde{h}_{n_1,t}\tilde{h}_{n_2,t+\tau}=0 \tag{12}$$

可得结论序列集 S 是一个零相关区序列集，定理成立。

3.1.2　构造法 2

设定初始参数 N 和 Z，取一个 $N\times N$ 阶的二元正交矩阵 $\boldsymbol{H}=\left[h_{t,k}\right]_{N\times N}$，其中，$h_{t,k}\in\{1,-1\}$ 表示矩阵的第 t 行第 k 列元素。若 $\gcd(N,Z)=d>1$，设 $L=NZ$，$L_0=\mathrm{lcm}(N,Z)$，按下面步骤进行插零。

步骤 1　将矩阵 $\boldsymbol{H}$ 进行插零，构成新的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{H}}$，其第 n 行可以表示为 $\tilde{\boldsymbol{h}}_n=(\tilde{h}_{n,0},\tilde{h}_{n,1},\cdots\tilde{h}_{n,L-1})$

$$\tilde{h}_{n,t}=\begin{cases} h_{n,k}, & t=kZ \\ h_{n,k'}, & t=lL_0+\left(\frac{L}{L_0}-l\right)+kZ \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{13}$$

其中，$k'=\dfrac{L_0}{Z}l+k$，$k=0,1,\cdots,\dfrac{L_0}{Z}-1$，$l=1,2,\cdots,\dfrac{L}{L_0}-1$。

步骤 2　构造序列集 $S=\{s^0,s^1,\cdots,s^{N-1}\}$，其中，每个序列长度为 $L=NZ$。具体构造如下

$$s^n=(s^n(0),s^n(1),\cdots,s^n(L-1))，\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{14}$$

$$s^n(t)=\tilde{h}_{n,t}，\ 0\leqslant t\leqslant L-1 \tag{15}$$

定理 2　构造得到的序列集 S 是一个三元零相关区序列集，参数为 $ZCZ(L,N,Z-2)$，其中，$L=NZ$。

证明过程与定理 1 类似。

3.2　滤波法构造零相关区高斯整数序列集

下面，利用完备高斯整数序列对构造法 1 和构造法 2 得到的三元序列变换到高斯整数序列。

步骤 1　设 $a=(a(0),a(1),\cdots,a(Z-1))$ 是一个长度为 Z 的完备高斯整数序列，$a(t)\in\{x+y\mathrm{i}\}$，其中，x 和 y 为整数。将序列 a 每个元素后加上 $N-1$ 个连续 0 元素，得到一个新的完备序列如下

$$\begin{aligned}\tilde{a}&=(\tilde{a}(0),\tilde{a}(1),\cdots,\tilde{a}(L-1))\\&=(a(0),\overbrace{0,\cdots0}^{N-1},a(1),\overbrace{0,\cdots0}^{N-1},\cdots,a(Z-1),\overbrace{0,\cdots0}^{N-1})\end{aligned} \tag{16}$$

序列 $\tilde{a}$ 中的元素可利用式(17)表示。

$$\tilde{a}(t)=\begin{cases} a(k), & t=kN \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{17}$$

步骤 2　设序列集 S 是由构造法 1 或构造法 2 得到的三元 ZCZ 序列集。将 S 作为基序列集，经序列 $\tilde{a}$ 滤波后得到一个新的序列集 $C=\{c^0,c^1,\cdots,c^{N-1}\}$

如下

$$c^n=(c^n(0),c^n(1),\cdots,c^n(L-1))\text{，}\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{18}$$

$$c^n(k)=\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{a}(t)s^n(t+k)\text{，}\quad 0\leqslant k\leqslant L-1 \tag{19}$$

定理 3 序列集C是一个零相关区高斯整数序列集，当$\gcd(N,Z)=1$时其参数为$ZCZ(L,N,Z-1)$，当$\gcd(N,Z)=d>1$时参数为$ZCZ(L,N,Z-2)$，其中，$L=NZ$。

证明 首先证明序列集C是一个零相关区序列集。

由于滤波操作没有改变序列长度及数目，因此与序列集S相同，即序列集C中序列数目为N，序列长度为$L=NZ$。设$c^{n_1},c^{n_2}\in C$是序列集C中任意2个序列，$s^{n_1},s^{n_2}\in S$是序列集S中任意2个序列。根据引理2，由于序列$\tilde{a}$是完备序列，若$\gcd(N,Z)=1$，则当$n_1\neq n_2$，$0\leqslant\tau\leqslant Z-1$或$n_1=n_2$，$0<\tau\leqslant Z-1$时，有$R_{c^{n_1},c^{n_2}}(\tau)=R_{s^{n_1},s^{n_2}}(\tau)=0$成立。同理，根据引理2可得若$\gcd(N,Z)=d>1$，则当$n_1\neq n_2$，$0\leqslant\tau\leqslant Z-2$或$n_1=n_2$，$0<\tau\leqslant Z-2$时，有$R_{c^{n_1},c^{n_2}}(\tau)=R_{s^{n_1},s^{n_2}}(\tau)=0$成立。

下面，证明序列集中序列元素取自高斯整数集合$\{\pm(x+y\mathrm{i})\}$，其中，x和y为整数。

设$s^n=(s^n(0),s^n(1),\cdots,s^n(L-1))$，$s^n\in S$。由于初始正交矩阵$\boldsymbol{H}$的元素$h_{t,k}\in\{1,-1\}$，可知序列$S^n$的非零元素$s^n(t)\in\{1,-1\}$。已知完备序列$\tilde{a}$的非零元素$\tilde{a}(t)\in\{x+y\mathrm{j}\}$，其中，$x$和$y$为整数。分2种情况讨论。

1) 当$\gcd(N,Z)=1$时，由式(19)可知，只需证明当k为一个固定的整数时，对于任意$0\leqslant t\leqslant L-1$，$\tilde{a}(t)s^n(t+k)$只有一个非零值便可证明序列元素$c^n(k)$取值于高斯整数集合$\{\pm(x+y\mathrm{i})\}$。由式(8)、式(10)和式(17)可得

$$\tilde{a}(t)s^n(t+k)\begin{cases}h_{n,k_1}a(k_2),t=k_1Z=k_2N-k(\bmod L)\\0,\text{其他}\end{cases} \tag{20}$$

由式(20)可知，证明$\tilde{a}(t)s^n(t+k)$对于任意的$0\leqslant t\leqslant L-1$时只有一个非零值，只需证明对于任意的$0\leqslant t\leqslant L-1$有唯一整数对$(k_1,k_2)$使$k_1Z+k=k_2N(\bmod L)$成立。由$\gcd(N,Z)=1$可知，存在唯一整数对$(x,y)$使$xN+yZ=1$成立，其中，$x$或$y$为负数。不失一般性，设$y$为负数，令$y'=-y$。可得$xN=y'Z+1$，进一步得$kxN=ky'Z+k$，$0\leqslant k<L$。因此，当$k$固定时，对于任意的$0\leqslant t\leqslant N-1$，只有唯一整数对$(ky',kx)$使$k_1Z+k=k_2N$成立。

2) 当$\gcd(N,Z)=d>1$时，构造法2得到的三元矩阵$\tilde{\boldsymbol{H}}$每行$\tilde{\boldsymbol{h}}_n$可以分解成$\tilde{\boldsymbol{h}}_n=\sum_{l=0}^{d-1}\tilde{h}_n^{\,l}$，其中

$$\tilde{h}_{n,t}^l=\begin{cases}\tilde{h}_{n,t},& lL_0\leqslant t<(l+1)L_0\\0,&\text{其他}\end{cases} \tag{21}$$

其中，$k=0,1,\cdots,\frac{L_0}{N}-1$，$l=1,2,\cdots,\frac{L}{L_0}-1$，$t=0,1,2,\cdots,L-1$。此时，有$c^n=s^n*\tilde{a}=\tilde{h}_n*\tilde{a}=\sum_{l=0}^{d-1}\tilde{h}_n^l*\tilde{a}$。因此，序列$c^n$也可以分解成$d$个序列相加的形式为$c^n=\sum_{l=0}^{d-1}c^{n,l}$，每个序列表示如下

$$c^{n,l}=\tilde{h}_n^l*\tilde{a} \tag{22}$$

$$c^{n,l}(k)=\sum_{t=0}^{L-1}\tilde{h}_{n,t+k}^l\tilde{a}(t)\text{，}\quad 0\leqslant k\leqslant L-1 \tag{23}$$

当$l=0$时，有

$$\tilde{h}_{n,t+k}^0=\begin{cases}h_{n,k_1},0\leqslant t<L_0,t=k_1Z\\0,\text{其他}\end{cases} \tag{24}$$

此时，有

$$\tilde{h}_{n,t+k}^0\tilde{a}(t)=\begin{cases}h_{n,k_1}a(k_2),t=k_2N-k=k_1Z(\bmod L)\\0,\text{其他}\end{cases} \tag{25}$$

由式(25)可知$\tilde{h}_{n,t+k}^0\tilde{a}(t)$仅在当$t=k_2N-k=k_1Z(\bmod L)$时不为0，其余都为0。由于$\gcd(N,Z)=d$时，存在唯一整数对$(x,y)$使$xN+yZ=d$成立，其中，$x$或$y$为负数。不失一般性，设$y$为负数，令$y'=-y$。可得$xN=y'Z+d$，式子两边同时乘以整数$s$，$0\leqslant s<\frac{L}{d}$，可得$sxN=sy'Z+sd(\bmod L)$。可知存在唯一整数对$(k_2,k_1)$，$k_2=sx$，$k_1=sy'$满足式子$t=k_2N=k_1Z+k(\bmod L)$，$k=sd$。因此对于$0\leqslant t\leqslant L-1$，

当k=sd为一个固定整数时，$\tilde{h}_{n,t+k}^0\tilde{a}(t)$取值为高斯整数集合$\{\pm(x+y\mathrm{i})\}$中元素。可得结论$c^{n,0}(k)$在$k=sd$时是一个取自集合$\{\pm(x+y\mathrm{i})\}$的高斯整数，其余为0。同理可以证明当$l=1,2,\cdots,d-1$时，序列$c^{n,l}$的元素$c^{n,l}(k)$在$k=sd-l$时取值为高斯整数集合$\{\pm(x+y\mathrm{i})\}$中元素。因此，$c^n=\sum_{l=0}^{d-1}c^{n,l}$是

一个定义在集合$\{\pm(x+y\mathrm{i})\}$上的高斯整数序列，证毕。

4　序列集参数分析及构造实例

当$\gcd(N,Z)=1$时，序列集C参数为$ZCZ(L,N,Z-1)$。计算序列集C的性能参数如下

$$\eta=\frac{(Z-1+1)N}{L}=\frac{NZ}{L}=1 \tag{26}$$

根据定义 5 可知序列集C参数达到理论界限，依 Tang-Fan-Matsufuji 界是最优零相关区序列集。

当$\gcd(N,Z)=d>1$时，序列集C参数为$ZCZ(L,N,Z-2)$。计算序列集C的性能参数如下

$$\eta=\frac{N\left(Z-2+1\right)}{L}=\frac{N(Z-1)}{NZ}=1-\frac{1}{Z} \tag{27}$$

性能参数随着零相关区长度的增大而增大，当设定参数Z为较大值时，序列集性能参数达到几乎最优。

下面，通过 2 个实例来验证本文构造方法。

例 1　设矩阵$\boldsymbol{H}$是一个4×4阶的二元 Hadamard 矩阵。设定$Z=5$，选取长度为 5 的完备高斯整数序列a=(2+i, 7+i, −3+i, −3+i, 7+i)。由于$\gcd(N,Z)=1$，根据构造法 1 通过插零法得到4×20阶的三元矩阵如下

$$\tilde{\boldsymbol{H}}=\begin{bmatrix}+,0,0,0,0,+,0,0,0,0,+,0,0,0,0,+,0,0,0,0\\+,0,0,0,0,-,0,0,0,0,+,0,0,0,0,-,0,0,0,0\\+,0,0,0,0,+,0,0,0,0,-,0,0,0,0,-,0,0,0,0\\+,0,0,0,0,-,0,0,0,0,-,0,0,0,0,+,0,0,0,0\end{bmatrix}$$

其中，“$+$”表示“1”，“$-$”表示“−1”。

构造滤波序列：$\tilde{a}=(2+\mathrm{i},0,0,0,7+\mathrm{i},0,0,0,-3+\mathrm{i},0,0,0,-3+\mathrm{i},0,0,0,7+\mathrm{i},0,0,0)$。根据定理 3 得到一个参数为$ZCZ(20,4,4)$的零相关区高斯整数序列集$C=\{c^0,c^1,c^2,c^3\}$，部分序列如下

c^0=(2+i, 7+i, −3+i, −3+i, 7+i, 2+i, 7+i, −3+i, −3+i, 7+i, 2+i, 7+i, −3+i, −3+i, 7+i, 2+i, 7+i, −3+i, −3+i, 7+i)

c^1=(2+i, −7−i, −3+i, 3−i, 7+i, −2−i, 7+i, 3−i, −3+i, −7−i, 2+i, −7−i, −3+i, 3−i, 7+i, −2−i, 7+i, 3−i, −3+i, −7−i)

c^2=(2+i, −7−i, 3−i, −3+i, 7+i, −2−i, −7−i, −3+i, −3+i, −7−i, −2−i, 7+i, −3+i, 3−i, −7−i, 2+i, 7+i, 3−i, 3−i, 7+i)

c^3=(2+i, 7+i, 3−i, 3−i, 7+i, 2+i, −7−i, 3−i, −3+i, 7+i, −2−i, −7−i, −3+i, −3+i, −7−i, −2−i, 7+i, −3+i, 3−i, −7−i)

部分相关函数分布如下

$R_{c^0}(\tau)$=(500, 0, 0, 0, 0, 500, 0, 0, 0, 0, 500, 0, 0, 0, 0, 500, 0, 0, 0, 0)

$R_{c^0,c^2}(\tau)$=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

根据参数$ZCZ(20,4,4)$，计算序列集的性能参数$\eta=\frac{4(4+1)}{20}=1$，序列集参数达到理论界限。

例 2　设矩阵$\boldsymbol{H}$是一个8×8阶的二元 Hadamard 矩阵，设定$Z=6$。可知$\gcd(N,Z)=2>1$，按照构造法 2 通过插零法得到8×48阶三元矩阵。选取长度为 6 的完备高斯整数序列$a=(2\mathrm{i},-2,3-\mathrm{i},-2,2\mathrm{i},1+3\mathrm{i})$，构造滤波序列

$$\tilde{a}=\big(2\mathrm{i},0,0,0,0,0,0,0,-2,0,0,0,0,0,0,0,3-\mathrm{i},0,0,0,0,0,0,0,\\-2,0,0,0,0,0,0,0,2\mathrm{i},0,0,0,0,0,0,0,1+3\mathrm{i},0,0,0,0,0,0,0\big)$$

根据定理 3 得到一个参数为$ZCZ(48,8,4)$高斯整数序列集$C=\{c^0,c^1,c^2,c^3,c^4,c^5,c^6,c^7\}$，部分序列如下

c^0=(2i, 2i, −2, 1+3i, 3−i, 2i, −2, 2i, −2, 1+3i, 3−i, 2i, −2, −2, 2i, 1+3i, 3−i, 2i, −2, −2, 2i, 3−i, 1+3i, 2i, −2, −2, 2i, 3−i, 1+3i, −2, 2i, −2, 2i, 3−i, 1+3i, −2, 2i, 2i, −2, 3−i, 1+3i, −2, 2i, 2i, −2, 1+3i, 3−i, −2)

c^1=(2i, −2i, 2, 1+3i, 3−i, −2i, 2, 2i, −2, −1−3i, −3+i, 2i, −2, 2, −2i, 1+3i, 3−i, −2i, 2, −2, 2i, −3+i, −1−3i, 2i, −2, 2, −2i, 3−i, 1+3i, 2, −2i, −2, 2i, −3+i, −1−3i, −2, 2i, −2i, 2, 3−i, 1+3i, 2, −2i, 2i, −2, −1−3i, −3+i, −2)

c^2=(2i, 2i, −2, −1−3i, −3+i, −2i, 2, 2i, −2, 1+3i, 3−i, −2i, 2, 2, −2i, 1+3i, 3−i, 2i, −2, 2, −2i, −3+i, −1−3i, 2i, −2, −2, 2i, −3+i, −1−3i, 2, −2i, −2, 2i, 3−i, 1+3i, 2, −2i, −2i, 2, 3−i, 1+3i, −2, 2i, −2i, 2, −1−3i, −3+i, −2)

部分相关函数如下

$R_{c^0}(\tau)$=(288, 0, 0, 0, 0, 36, 216, 36, 0, 0, 0, 72, 144, 72, 0, 0, 0, 108, 72, 108, 0, 0, 0, 144, 0, 144, 0, 0, 0, 108, 72, 108, 0, 0, 0, 72, 144, 72, 0, 0, 0, 36, 216, 36, 0, 0, 0, 0)

$R_{c^0,c^1}(\tau)$=(0, 0, 0, 0, 0, 36, 72, 36, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 36, 72, 36, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 36, 72, 36, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 36, 72, 36, 0, 0, 0, 0)

根据参数$ZCZ(48,8,4)$，计算序列集的性能参数$\eta=\frac{8(4+1)}{48}=83.3\%$。

5 结束语

本文基于二元正交矩阵和完备高斯整数序列构造了具有优良参数的零相关区高斯整数序列集。与已有的方法[13]相比，该方法得到的零相关区高斯整数序列集具有更优的参数。另外，本文方法可以根据不同的应用场合来灵活设定序列的零相关区长度，因此，在实际应用中具有更大的应用潜力。目前看来，二元正交矩阵与完备高斯整数序列的研究成果较为丰富，以此基础可以构造出大量的零相关区高斯整数序列集。

参考文献：

[1] ZENG F X, ZENG X P, ZENG X Y, et al. Perfect 8-QAM+ sequences[J]. IEEE Wireless Communication Letters, 2012, 1(4): 388-391.

[2] LI Y B, XU C Q. Zero correlation zone sequence sets over the 8-QAM+ constellation[J]. IEEE Communications Letters, 2012, 16(11):1844-1847.

[3] ZENG F X, ZENG X P, ZHANG Z Y, et al. 16-QAM sequences with zero correlation zone from the known binary ZCZ sequences and Gray mapping[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2011, E94-A(11): 2466-2471.

[4] LIU Z L, GUAN Y L. 16-QAM almost complementary sequences with low PMEPR [J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(2):668-679.

[5] FAN P Z, DARNELL M. Maximal length sequences over Gaussian integers [J]. Electronics Letters, 1994, 30(16): 1286-1287.

[6] HU W W, WANG S H, LI C P. Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(11):6074-6079.

[7] YANG Y, TANG X H, ZHOU Z C. Perfect Gaussian integer sequences of odd prime length [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(10):615-618.

[8] LEE C D, HUANG Y P, CHANG Y, et al. Perfect Gaussian integer sequences of odd period $2m-1$[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(7): 881-885.

[9] PEI S C, CHANG K W. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary length [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(8): 1040-1044.

[10] CHANG H H, LI C P, LEE C D, et al. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(7): 4107-4115.

[11] 陈晓玉, 许成谦, 李玉博. 新的完备高斯整数序列的构造方法 [J]. 电子与信息学报, 2014, 36(9):2081-2085.
CHEN X Y, XU C Q, LI Y B. New constructions of perfect Gaussian integer sequences [J] Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(9): 2081-2085.

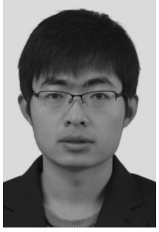
[12] WANG S H, LI C P, CHANG H H, et al. A systematic method for constructing sparse Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions [J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(1): 365-376.

[13] DENG X M, FAN P Z, SUEHIRO N. Sequences with zero correlation over Gaussian integers [J]. Electronics Letters, 2000, 36(6): 552-553.

[14] TANG X H, FAN P Z, MATSUFUJI S. Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone [J]. Electronics Letters, 2000, 36(6): 551-552.

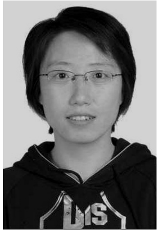
[15] TSAI L S, SU Y T. Transform domain approach for sequence design and its applications [J]. IEEE Journal on Selected in Communications, 2006, 24(1):75-83.

作者简介：



李玉博（1985-），男，河北衡水人，博士，燕山大学副教授、硕士生导师，主要研究方向为 CDMA 无线通信技术、序列设计、信号波形设计。

孙嘉安（1992-），女，河北秦皇岛人，燕山大学硕士生，主要研究方向为无线通信、序列设计。



荆楠（1978-），女，黑龙江哈尔滨人，燕山大学副教授，主要研究方向为时变稀疏信号处理。